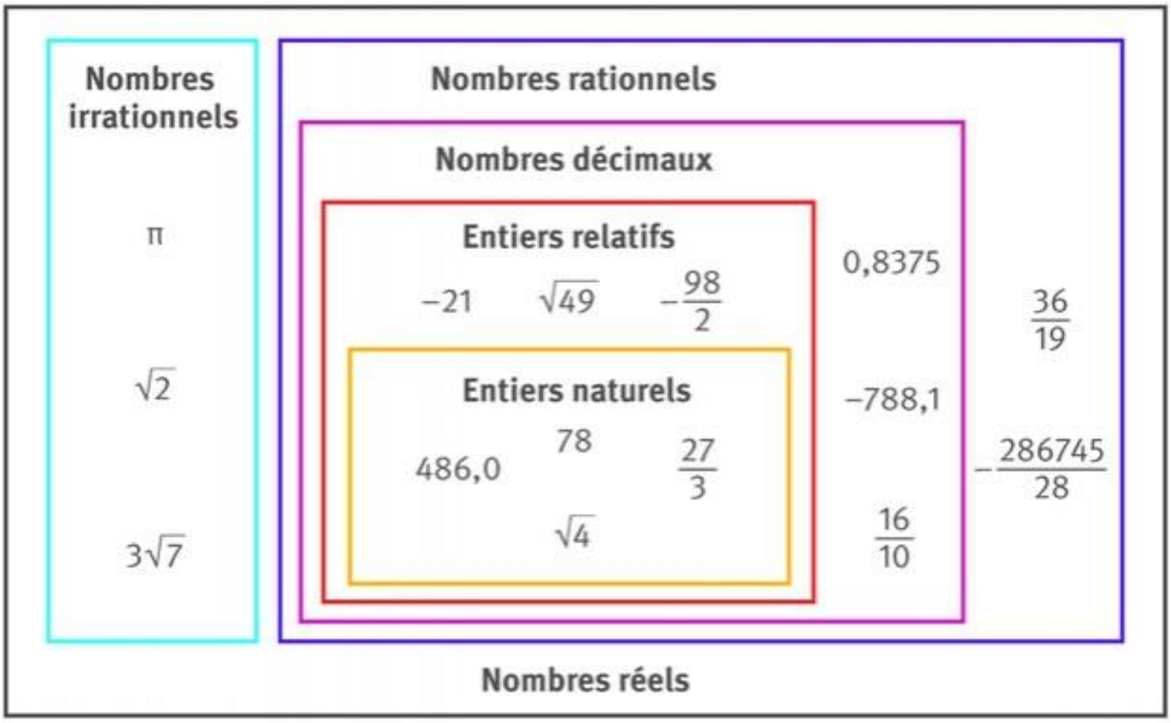
Arithmétique

I – Les ensembles de nombres :

Les nombres que l'on utilise peuvent être classés dans différents ensembles dont certains sont imbriqués.



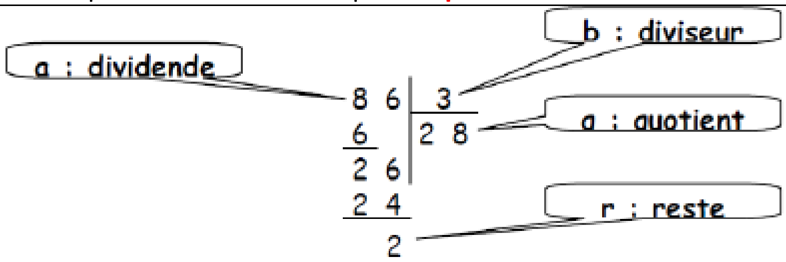
Nom de l'ensemble	Définition	Exemples
Les entiers naturels	Un nombre entier naturel est un nombre **entier positif**.	0 ; 25,0 ; $\frac{12}{6}$
Les entiers relatifs	Un entier relatif est un nombre entier positif ou négatif	-23 ; 103 ; $\frac{-25}{5}$
Les nombres décimaux	Un nombre décimal peut s'écrire avec un **nombre fini de chiffres après la virgule.**	33 ; $\frac{4}{5}$; -57,8 ; $\frac{-96}{4}$
Les nombres rationnels	Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la **forme d'une fraction $\frac{a}{b}$ où a et b sont des nombres entiers** avec b ≠0.	5 ; $\frac{-1}{3}$
Les nombres irrationnels	Ce sont tous les nombres qui ne sont pas rationnels.	$\sqrt{5}$; π

L'ensemble des nombres réels contient tous ces ensembles !

Dans ce chapitre, nous travaillerons avec des nombres entiers positifs.

II Divisibilité

1 – Division euclidienne (rappel)

Définition	Effectuer **la division euclidienne de a par b** signifie trouver deux nombres entiers positifs q et r tels que : $a = b \times q + r$ **et** $r < b$ q est le **quotient entier** de cette division, r est le **reste**.
Exemple	

Remarque	Avec la calculatrice, on peut trouver le quotient et le reste grâce à la touche 
Exemple	Division euclidienne de 1290 par 7 Q = 184 ; R = 2 Donc 1209 = 7 x 184 + 2

2 – Diviseurs d'un nombre entier (rappel)

Définition	On dit que **b est un diviseur de a** si le reste de la division euclidienne de a par b est nul (r = 0). C'est-à-dire qu'il existe un nombre entier q tel que a = b x q. On dit aussi que « **b divise a** », que « **a est divisible par b** » ou que « **a est un multiple de b** ».
Exemple	12 = 4 x 3 , donc 4 est un diviseur de 12, 3 est également un diviseur de 12. 12 est un multiple de 4 et un multiple de 3. Les diviseurs de 12 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12.

3 – Critères de divisibilité (rappel)

Propriétés	Un nombre entier est divisible par 2 s'il est pair (s'il se termine par 0, 2, 4, 6, 8). Un nombre entier est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou 5. Un nombre entier est divisible par 10 s'il se termine par 0. Un nombre entier est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3. Un nombre entier est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9. Un nombre entier est divisible par 4 si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4.
Exemple	Prenons le nombre 3750. • Il se termine par 0 donc il est divisible par 2, par 5, par 10 • 3 + 7 + 5 + 0 = 15 15 est divisible par 3 mais par 9 donc 3750 est divisible par 3 mais pas par 9. • 37**50** 50 n'est pas divisible par 4 donc 3750 ne l'est pas non plus.

III Nombres premiers

1 – Définition et propriétés

Définition	Un nombre entier positif est un **nombre premier** s'il admet **exactement deux diviseurs** (1 et lui-même).
Exemple	2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19…. Sont des nombres premiers. Tous les nombres pairs supérieurs à 2 ne sont pas premiers car divisibles par 2. 1 n'est pas un nombre premier car il n'admet qu'un seul diviseur, lui-même.

Propriétés	Pour montrer que n est un nombre premier, il suffit de démontrer qu'il n'est divisible par aucun des nombres premiers **inférieurs ou égal** à $\sqrt{n}$
Exemple	59 est-il un nombre premier ? $\sqrt{59} \sim 7{,}68$. 59 n'est pas divisible par 2, 3, 5 ou 7. Donc 59 est un nombre premier.

Propriétés	Tout nombre entier supérieur ou égal à 2 se **décompose de manière unique** en produit de facteurs premiers (on ne tient pas compte de l'ordre des facteurs).
Exemple	60 = 30 x 2 = 15 x 4 Mais 30, 15 et 4 ne sont pas des nombres premiers. La décomposition de 60 est : 60 = 2 x 2 x 3 x 5 ou 60 = 2^2 x 3 x 5 La décomposition de 728 est : 728 = 2 x 2 x 2 x 7 x 13 ou 728 = 2^3 x 7 x 13

2 – Fractions irréductibles

Définition	Une fraction est irréductible lorsqu'elle ne peut plus être simplifiée.
Exemple	La décomposition en facteur premier aide à faire apparaître les facteurs à simplifier $\frac{60}{728} = \frac{2^2\times3\times5}{2^3\times7\times13} = \frac{3\times5}{2\times7\times13} = \frac{15}{182}$ Forme irréductible

3 – PGCD

Définition	Le PGCD de deux nombre est le **plus grand diviseur commun** de ces deux nombres.
Exemple	On cherche le PGCD de 24 et 36 noté PGCD (24 ; 36) Diviseurs de 24 : 1, 2, 3, 4, 6, 8, **12**, 24. Diviseurs de 36 : 1, 2, 3, 4, 6, 9, **12**, 18, 36. Liste des diviseurs communs : 1, 2, 3, 4, 6, **12**. Le PGCD (24 ; 36) = **12**
Méthode	On cherche PGCD (252 ; 270) On décompose les deux nombres en produits de facteurs 1^{ers}. 252 = 2^2x3^2x7 270 = 2x3^3x5 On ne prend **que** les facteurs premiers **qui apparaissent dans les deux décompositions** et on les affecte du **plus petit exposant commun**. PGCD (252 ; 270) = 2x3^2 = 18
Usage du PGCD	Le PGCD permet de résoudre des problèmes dans lesquels on doit constituer des groupes identiques contenant le même nombres de différents composants sans qu'il en reste .

4 – PPCM

Définition	Le PPCM de deux nombre est le **plus petit multiple commun** de ces deux nombres.
Exemple	On cherche le PPCM de 24 et 36 noté PPCM (24 ; 36) Multiples de 24 : 24, 48, **72**, 96, ….. Multiples de 36 : 36, **72**, 108, ….. PPCM (24 ; 36) = **72** Faire la liste de tous les multiples est long et fastidieux….
Méthode	On cherche PPCM (252 ; 270) On décompose les deux nombres en produits de facteurs 1^{ers}. 252 = 2^2x3^2x7 270 = 2x3^3x5 On prend **tous** les facteurs premiers qui apparaissent et on les affecte **du plus grand exposant**. PPCM (252 ; 270) = 2^2x3^3x5x7 = 3780.
Usage du PPCM	Le PPCM permet de résoudre des problèmes de synchronisation de deux phénomènes de périodicité différentes (alignement de planètes, engrenages….)